

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ  
ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΤΕΤΑΡΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2026**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Δίνεται η σταθερή συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = c$ , όπου  $c \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ότι  $f'(x) = 0$ .

**Μονάδες 6**

**A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano.

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$  ;

**Μονάδες 5**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \eta \mu x$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = -\sigma \upsilon \nu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**β)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**γ)** Αν  $f$  συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f(x) \geq 0$ , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0.$$

**δ)** Αν δύο μεταβλητά μεγέθη  $x, y$  συνδέονται με τη σχέση  $y = f(x)$ , όταν  $f$  είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του  $y$  ως προς  $x$  στο σημείο  $x_0$  την παράγωγο  $f'(x_0)$ .

**ε)** Κάθε συνάρτηση " $1-1$ " είναι και γνησίως μονότονη.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 4 - \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

- B1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 5).

**Μονάδες 8**

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε  $f^{-1}(x) = \frac{1}{4-x}$ ,  $x \in (-\infty, 4)$ .

- B2.** i) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $g = f + f^{-1}$  (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x) = 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}, \quad x \in (0, 4) \quad (\text{μονάδες 6}).$$

**Μονάδες 10**

- B3.** Να εξετάσετε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  του ερωτήματος B2 στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = e^x + x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $g(x) = \ln x$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

- Γ1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$ .

**Μονάδες 6**

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρούμε  $h(x) = x + \ln x - 1$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

- Γ2.** i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $h(x)$  (μονάδες 5).

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $h(x) = 2026$  έχει ακριβώς μία ρίζα (μονάδες 6).

**Μονάδες 11**

- Γ3.** i) Να αποδείξετε ότι η  $h$  αντιστρέφεται (μονάδες 3).

ii) Να επιλύσετε την εξίσωση  $h^{-1}(x) = 1$  (μονάδες 5).

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

- η  $f$  είναι παραγωγίσιμη με  $f'(x) = \alpha x^2 + \beta$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,
- η  $f$  παρουσιάζει στη θέση  $x_0 = 1$  τοπικό μέγιστο το 0,
- η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της  $f$  στη θέση  $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = \frac{\pi}{4}$  rad.

**Δ1.** i) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -3$  και  $\beta = 3$  (μονάδες 5).

ii) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = -x^3 + 3x - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f$ .

**Μονάδες 10**

**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+f(x))}{|f(x)|(x-1)^2}$$

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**