

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ**  
**ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ 09 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$ , για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Fermat.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις  $g \circ f$  και  $f \circ g$ , τότε οι  $g \circ f$  και  $f \circ g$  δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

**β)** Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$ .

**γ)** Εάν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $f(x_0)$ , τότε η σύνθεσή τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

**δ)** Αν η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$ , με  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f(x) = 0$ , για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**ε)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ .

- B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

**Μονάδες 6**

- B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Μονάδες 6**

- B3.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:  $I = \int_1^2 f(x) dx$ .

**Μονάδες 7**

- B4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = e^x$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $g, h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπους

$$g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad \text{και} \quad h(x) = \ln x.$$

- Γ1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f = g \circ h$ .

**Μονάδες 6**

- Γ2.** Αν  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ,  $x > 1$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι  $f^{-1} = f$  (όπου  $f^{-1}$  είναι η αντίστροφη της συνάρτησης  $f$ ).

**Μονάδες 6**

- Γ3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

- Γ4.** Να εξετάσετε αν η εξίσωση  $f(x) = \sin x$  έχει λύση στο  $(1, +\infty)$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = 0$
- $f(2) = 2$
- $f'(2) = 1$
- $f''(x) < 0$  για κάθε  $x \in [1, 2]$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$

- i. έχει κοινό σημείο με την ευθεία  $(\epsilon_1): y = -x + 2$  (μονάδες 4)  
και
- ii. εφάπτεται στην ευθεία  $(\epsilon_2): y = x$  (μονάδες 4)

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x}$ , για κάθε  $x \in (1, 2)$ .

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**