

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ  
ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

Αν

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε  $x$  εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ ,

να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f, g$  είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $\frac{f}{g}$  είναι το  $A \cap B$ .

**β)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε  $f'(x_0) = 0$ .

**γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , παρουσιάζει στο σημείο  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  καμπή, τότε  $f''(x_0) = 0$ .

**δ)** Για οποιαδήποτε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , ισχύει ότι  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**ε)** Κάθε συνάρτηση  $f$  που είναι συνεχής σε σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$

και η συνάρτηση  $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \sqrt{x}$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφη της είναι η  $f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ ,  $x < 0$ .

**Μονάδες 9**

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g \circ f^{-1}$  είναι η  $h(x) = \frac{x-1}{x}$ ,  $x < 0$ .

**Μονάδες 8**

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $h$  του ερωτήματος B2.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

**Γ1.** Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 7**

**Γ2.** Να μελετηθεί η  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = k$  για τις διάφορες πραγματικές τιμές του  $k$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπους

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = -x^2 - x.$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  που διέρχεται από το σημείο  $M(-1, 0)$  είναι η ευθεία  $\varepsilon: y = x + 1$ .

**Μονάδες 9**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία ( $\epsilon$ ) του ερωτήματος Δ1 εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ .

**Μονάδες 9**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) > g(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

- 1.** Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**