

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

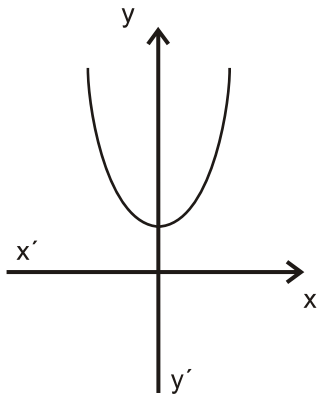
**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

**Μονάδες 7**

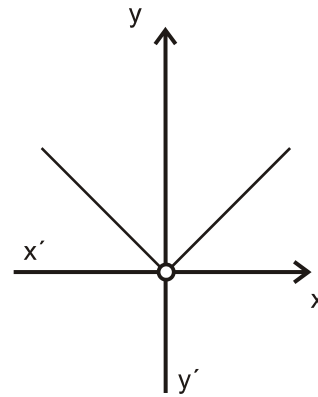
**A2.** Έστω  $A$  ένα μη κενό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ;

**Μονάδες 4**

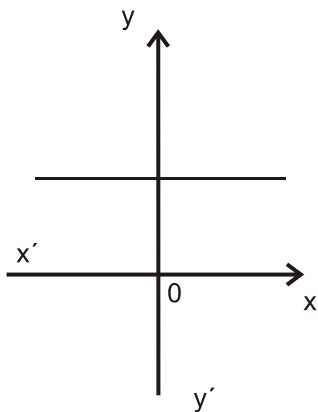
**A3.** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g, F, G, H, T$ .



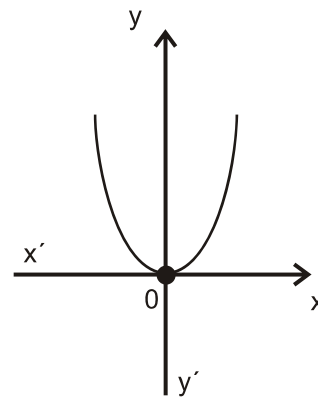
**(f)**



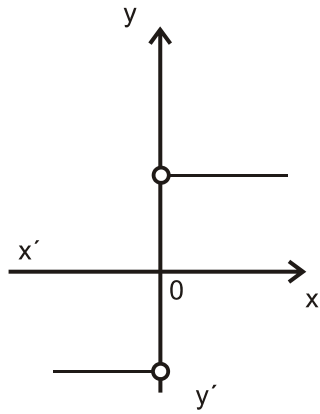
**(g)**



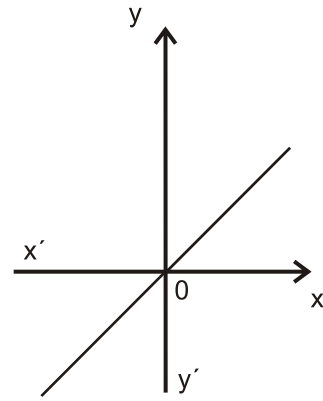
**(F)**



**(G)**



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιό σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

**Μονάδες 4**

**A4.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$ ».

- α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. (μονάδα 1)
- β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.
- β) Αν μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι '1-1', τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το  $[0, 1]$  και σύνολο τιμών το  $[2, 3]$ , τότε ορίζεται η  $f \circ g$  με πεδίο ορισμού το  $[0, 1]$  και σύνολο τιμών το  $[2, 3]$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}$ .

**B1.** Να υπολογίσετε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής.

**Μονάδες 3**

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι  $\alpha = 1$ .

**B2.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[\frac{1}{2}, 4]$ .

**Μονάδες 6**

**B3.** Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία  $y = -\frac{1}{4}x + 2018$  και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

**Μονάδες 7**

**B4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$  και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο:  $f(x) = \frac{e^x}{x}$

**Γ1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$  είναι το διάστημα  $(e, +\infty)$ .

**Μονάδες 7**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} - \frac{\eta\mu\alpha - 2}{x} = 0, \text{ όπου } \alpha > e,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς  $x$ , μία στο διάστημα  $(0, 1)$  και μία στο διάστημα  $(1, 2)$ .

**Μονάδες 10**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) + 1 > e + \ln f(x)$  για κάθε  $x > 1$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο:  $f(x) = 2 \eta\mu x - x$ .

**Δ1.** Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$  (τοπικά και ολικά).

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x_0 \in [0, \pi]$  η γραφική παράσταση της  $f$  και η εφαπτομένη της στο  $A(x_0, f(x_0))$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^{\pi} f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx$ .

**Μονάδες 8**

**Δ4. α)** Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ . (μονάδες 2)

**β)** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \cdot \ln x]$ . (μονάδες 5)

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**