

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .
Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι
η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Μονάδες 7**
- A2.** Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;
- Μονάδες 4**
- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και
να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
- Μονάδες 4**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο
τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη
λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι
λανθασμένη.
- α)** Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$.
- β)** Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$
κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- γ)** Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε
 $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$
- δ)** Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του
συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως
προς x .
- ε)** Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια
μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$

B1. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 7

B2. Αν $\alpha = 1$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 11

B3. Για την παραπάνω τιμή του α , να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .

Μονάδες 7

Γ2. Να βρεθούν οι ρίζες και το πρόσημο της f'' .

Μονάδες 11

Γ3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει

- $f'(x) \cdot f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Δ2. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x)$.

Μονάδες 7

Δ3. Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[1, +\infty)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \sin x$ στο \mathbb{R} .

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ