

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

Μονάδες 7

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 2

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 6

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f

β) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Για την πολυωνυμική συνάρτηση
$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0 \quad \text{με } \alpha_n \neq 0$$

ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \alpha_0$

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΩΝ

- δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0
- ε) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z , με $z \neq -1$, για τους

οποίους ο αριθμός $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

B1. $|z|=1$

Μονάδες 9

B2. $\bar{z} = \frac{1}{z}$ και ότι ο αριθμός $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 8

B3. $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \leq 4$, όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha & , x < 1 \\ (x - \beta)^2 & , x \geq 1 \end{cases}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\beta^2 - 2\beta = \alpha$ και ότι $\alpha \geq -1$

Μονάδες 6

Γ2. Αν είναι $-1 \leq \alpha \leq 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[-1, 1]$

Μονάδες 8

Γ3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να βρείτε τα a και β

Μονάδες 6

Γ4. Αν $\alpha = \frac{5}{4}$ και $\beta = -\frac{1}{2}$, να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$ συνάρτηση f με $f(0) = -3$ και η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{1-x^2} f(x)$, $x \in (-1, 1)$ με

$g(x) \leq \beta x - 3$, $x \in (-1, 1)$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$

Δίνεται επιπλέον ότι η παράγωγος f' της f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, 1)$

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Δ1. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ και κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι $g'(0) = \beta$ και ότι η κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι η $y = \beta x - 3$

Μονάδες 8

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \beta$, $x \in (-1, 1)$, έχει μοναδική ρίζα το 0

Μονάδες 4

Δ4. Να δείξετε ότι $f(x) \geq \beta x - 3$, για κάθε $x \in (-1, 1)$

Μονάδες 7

ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ