

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , αν για κάποιο  $x_0 \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f''(x_0) = 0$ , τότε το  $x_0$  είναι θέση σημείου καμπής της  $f$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A3.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει  $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ , τότε

α) η εξίσωση  $f(x) = 0$  δεν έχει λύση στο  $(\alpha, \beta)$ .

β) η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία λύση στο  $(\alpha, \beta)$ .

γ) η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο  $(\alpha, \beta)$ .

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο  $(\alpha, \beta)$ .

**Μονάδες 4**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$

στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = G(\alpha) - G(\beta)$ .

**β)** Μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$ , ώστε  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**γ)** Αν ένα σημείο  $M(\alpha, \beta)$  ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης  $f$ , τότε το σημείο  $M'(\beta, \alpha)$  ανήκει στη γραφική παράσταση  $C'$  της  $f^{-1}$ .

**δ)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ , αν  $f(\alpha) = f(\beta)$ , τότε υπάρχει ακριβώς ένα  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = 0$ .

**ε)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει  $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = 0$ , τότε  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $h(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $h$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 7**

**B2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $h$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $h$ .

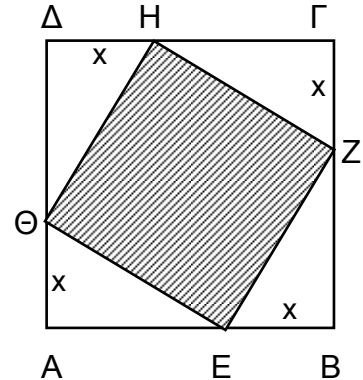
**Μονάδες 5**

**B4.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 e^x h(x) dx$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος με πλευρά  $2\text{cm}$ . Αν το τετράγωνο  $EZH\Theta$  έχει τις κορυφές του στις πλευρές του  $AB\Gamma\Delta$ :



**Γ1.** Να εκφράσετε την πλευρά  $EZ$  συναρτήσει του  $x$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου  $EZH\Theta$  δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 2$$

**Μονάδες 4**

**Γ3.** Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  το εμβαδόν του τετραγώνου  $EZH\Theta$  γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

**Μονάδες 9**

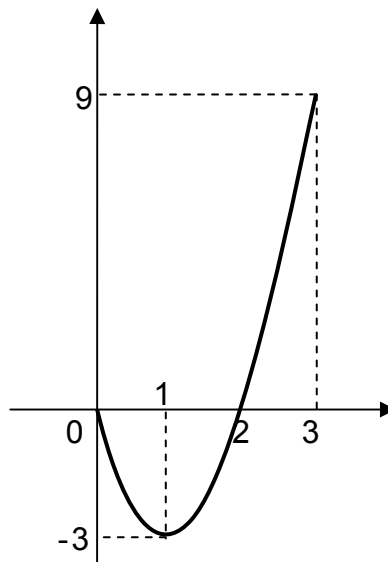
**Γ4.** Να εξετάσετε αν υπάρχει  $x_0 \in [0, 2]$ , για το οποίο το εμβαδόν  $f(x_0)$  του αντίστοιχου τετραγώνου  $EZH\Theta$  ισούται με  $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω συνάρτηση  $f$ , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[0, 3]$ , για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της  $f'$  δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



## ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- $f(0) = 2$  ,  $f(1) = 0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της  $f'$  και των ευθειών  $x=0$  και  $x=3$  ισούται με 8 τ.μ.
- Η  $f$  δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα  $[0, 3]$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(3) = 2$ ,  $f(2) = -2$  και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)-2}$ , δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της  $f$ .

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (2,3)$  για το οποίο δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$ .

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**Μονάδες 4**

### ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ