

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')**  
**ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) & ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό τότε να αποδείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι η ευθεία  $y = \ell$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1.$

**β)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$

**γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

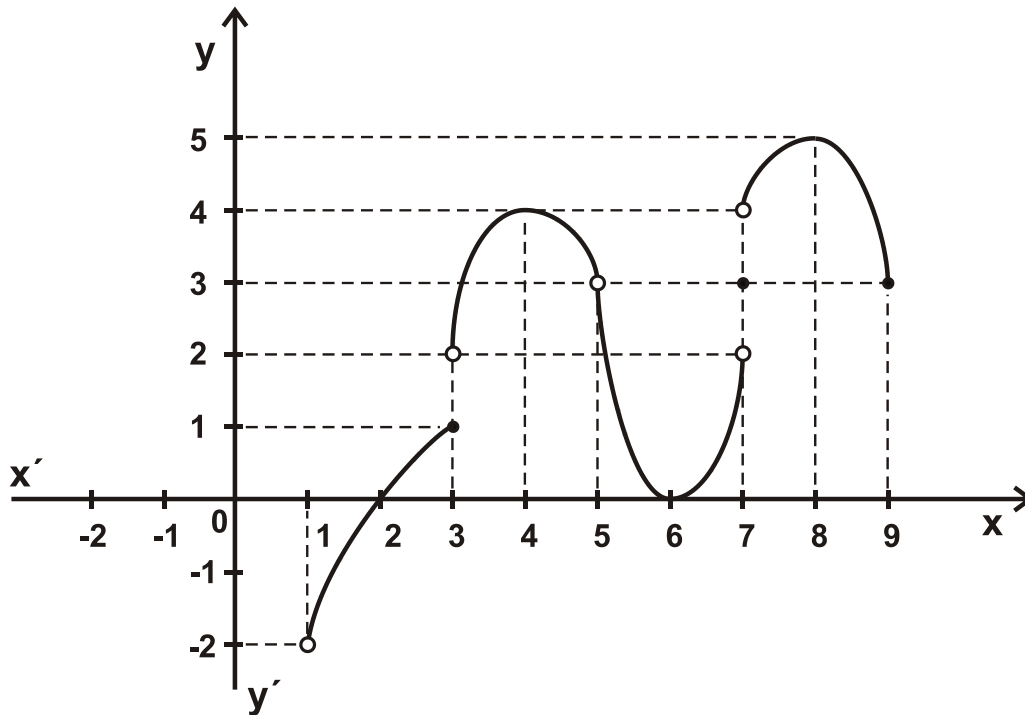
**δ)** Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού  $v \geq 2$ , η οποία έχει ασύμπτωτη.

**ε)** Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$ , που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ , όπου  $O$  η αρχή των αξόνων.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .



**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Μονάδες 2**

**B2.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$       β)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$   
γ)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$       δ)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$       ε)  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 7**

**B3.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$       β)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$       γ)  $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 9**

**B4.** Να βρείτε τα σημεία στα οποία η  $f$  δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 3**

**B5.** Να βρείτε τα σημεία  $x_0$  του πεδίου ορισμού της  $f$  για τα οποία ισχύει  $f'(x_0) = 0$ .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & , x \leq 0 \\ -x + 1 & , x > 0 \end{cases}$$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση  $f$ .

**Μονάδες 8**

Γ2. Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση  $f$  ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα  $[-1, 1]$ .

**Μονάδες 8**

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(0, \frac{5}{4})$ .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^3$ .

Δ1. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$ . (μονάδες 4)

**Μονάδες 6**

Δ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει:

$$f(\eta\mu x) > f(x - \frac{1}{6}x^3).$$

**Μονάδες 9**

Δ3. Ένα σημείο  $M$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = x^3$ ,  $x \geq 0$  με  $x = x(t)$  και  $y = y(t)$ . Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης  $y(t)$  του  $M$  είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης  $x(t)$ , αν υποθεθεί ότι  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

**Μονάδες 4**

Δ4. Να λυθεί στο  $\mathbb{R}$  η εξίσωση:

$$f\left(\frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 2}}\right) = f(x).$$

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο **εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο **εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**